

## Chapitre II : Formulation mathématique d'écoulements autour d'une aube

### II.1 Introduction

Dans les écoulements causés par le comportement du fluide est complètement décrit par le champ d'écoulement, le champ thermique, la distribution de la pression est les propriétés locales du fluide. Ces variables sont gouvernées par les lois fondamentales de conservation de la masse, la quantité de mouvement et la conservation d'énergie.

### II.2 Formulation mathématique

#### II.2.1 Équation de conservation de la masse

L'équation de la continuité est écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

#### II.2.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement relie masse volumique, vitesse, forces volumiques et tenseur de contraintes :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \nabla \cdot \rho \vec{V} = \rho \vec{g} - \nabla P + (\gamma + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{II.2})$$

Où P désigne la pression et  $\vec{g}$  le vecteur accélération de la pesanteur. Le premier terme de l'équation représente le taux d'augmentation de quantité de mouvement par unité de volume dans le volume de contrôle. Le deuxième terme correspond au taux de quantité de mouvement perdu par convection (par unité de volume) à travers la surface de contrôle.

#### II.2.3 Équation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie d'un fluide incompressible sous la forme générale est donnée par :

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} - \beta_T T \frac{\partial P}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + r + (\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{V}) \quad (\text{II.3})$$

Où  $r$ , la somme des puissances calorifiques dissipées par l'ensemble des sources de chaleur présentes au sein du fluide, est négligeable dans notre étude.

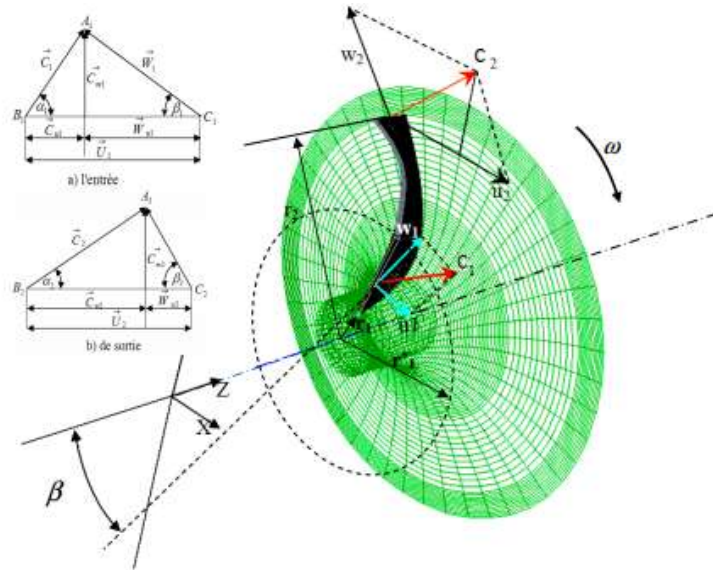
$\beta_T T \frac{\partial P}{\partial t}$  est la puissance volumique liée aux variations de pression,  $(\vec{\tau} \cdot \nabla \vec{V})$  est la dissipation visqueuse, ces deux dernières sont négligeables devant le  $\nabla \cdot (K \nabla T)$  terme.

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit alors, sous la forme [5.6] :

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla T) \quad (\text{II.4})$$

### II.3 Triangle des vitesses et degré de réaction

Les particules fluides pénètrent dans la roue, figure (II.1), par un passage axial de la section définie par (Sr'1–Sr 1) ensuite radial, avec une vitesse  $\vec{C}$  inclinée d'un angle  $\alpha_1$  par rapport à la vitesse périphérique  $\vec{U}_1$  et en sortent par une surface cylindrique de rayon  $r_2$ , avec une vitesse absolue  $\vec{C}_2$  inclinée d'un angle  $\alpha_2$  par rapport à la vitesse périphérique  $\vec{U}_2$ . Les états du mouvement à l'entrée et la sortie de la roue tournant à une vitesse angulaire constante  $\omega$ , sont représentés par les triangles des vitesses. Nous décomposons la vitesse absolue  $\vec{C}_1$  sur le bord d'attaque en vitesse périphérique  $\vec{U}_1 = r_1 \vec{\omega}$  et en vitesse relative  $\vec{W}_1$ , tangente au premier élément de l'aube. La composante méridienne de la vitesse absolue  $\vec{C}_1$  sera désignée par le symbole  $\vec{C}_{ml}$  et la composante périphérique par  $\vec{C}_{ul}$ . De la même façon, nous décomposons la vitesse absolue  $\vec{C}_2$  à la sortie de la roue, pour obtenir les vitesses  $\vec{C}_2 = r_2 \vec{\omega}$  et  $\vec{W}_2$  tangente au dernier élément de l'aube. La composante méridienne de la vitesse absolue à la sortie sera désignée par  $\vec{C}_{m2}$  et la composante périphérique par  $\vec{C}_{u2}$ .



**Figure II.1** : Triangle des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue du compresseur [7].

Les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  formés respectivement par les vecteurs  $(\vec{C}_1 \text{ et } \vec{U}_1)$ ,  $(\vec{C}_2 \text{ et } \vec{U}_2)$ , sont appelés angles des vitesses absolues respectivement à l'entrée et à la sortie, tandis que les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$  formés respectivement par les vecteurs  $(\vec{W}_1 \text{ et } -\vec{U}_1)$  et  $(\vec{W}_2 \text{ et } -\vec{U}_2)$  sont les angles des vitesses relatives respectivement d'entrée et de sortie de la roue. Les angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$  constituent en même temps les angles de l'aube, que l'on appelle habituellement angle à l'entrée de l'aubage et angle à la sortie de l'aubage respectivement [7].

## II.4 Méthodes numériques

### II.4.1 Introduction

La discrétisation des équations aux dérivées partielles a pour le but de transformer le problème continu en un problème discret, de façon à pouvoir assurer sa résolution par des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis, la méthode de différences finis et la méthode des volumes finis. Cette dernière est la plus utilisée actuellement dans le code de simulation numérique CFX [8].

### II.4.2 Méthodes des différences finis

La méthode des différences finis est à l'origine des premières simulations dans la mécanique des fluides et transfert de chaleur (1960 à 1965). Son principe consiste à discrétiser les équations aux nœuds de la grille en calculant chaque dérivée partielle à l'aide du développement de Taylor, pour obtenir les équations linéaires qui lient les variables

inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes variables aux nœuds voisins. La précision du schéma dépend du nombre de nœud de l'ensemble retenu pour approximer une dérivée donnée et du maillage effectué (en général utilisation de maillage régulier et structuré).

### II.4.3 Méthodes des éléments finis

La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (triangles ou quadrangles en général). Comme elle permet de modéliser des géométries très complexes, elle est parfois préférée à la méthode des volumes finis. Ensuite, la forme forte des équations est remplacée par la forme faible dans laquelle les inconnues sont approximées par une combinaison linéaire de fonctions de base dont le support est un élément. La méthode des éléments finis a vu les premières utilisations pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans les années soixante dix. Dans la méthode des éléments finis Les variables inconnues sont calculées par une combinaison linéaire de fonction. L'approche éléments finis se décompose en deux étapes :

- Approximation nodale des fonctions inconnues par sous-domaines (fonctions D'interpolation).
- Utilisation de la méthode des résidus pondérés qui permet de construire une formulation Intégrale à partir des équations aux dérivées partielles (la méthode de Galerkin est la plus fréquemment utilisée). C'est une méthode conservative sur un domaine.

### II.4.4 La méthode des volumes finis

Cette méthode consiste à subdiviser le domaine physique de l'écoulement en éléments de volumes plus ou moins réguliers dans lesquels les équations, décrivant l'écoulement, écrites sous une forme conservative, sont intégrées. Le but de cette méthode est de convertir l'équation différentielle générale en un système d'équations algébriques en mettant en relation les valeurs de la variable considérée  $f$  aux points nodaux adjacents d'un volume de contrôle typique. Cela est obtenu par l'intégration de l'équation différentielle gouvernante dans ce volume de contrôle avec l'approximation des différents termes (convection, diffusion et source).

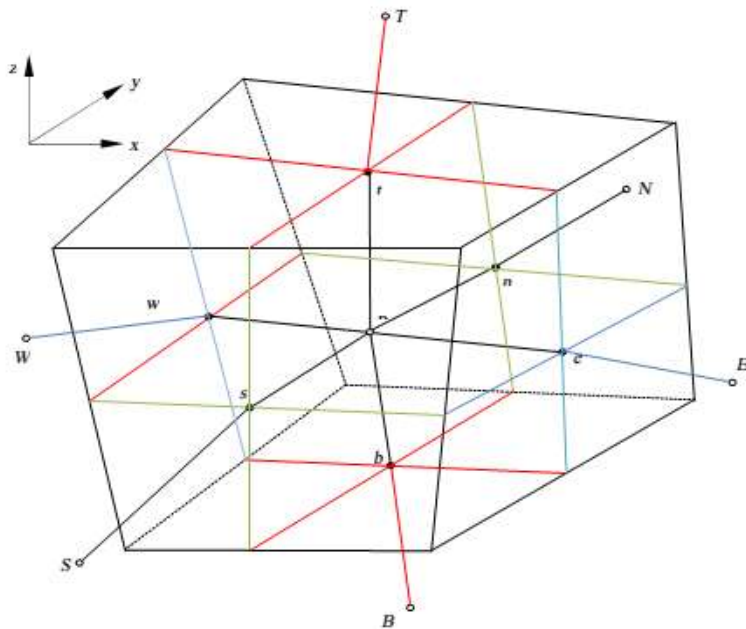
## II.5 Principe de la méthode des volumes finis

Les étapes de résolution de la méthode des volumes finis sont les suivantes [8] :

### II.5.1 Domaine de calcul (maillage)

Le domaine du calcul de la roue présenté, est subdivisée en un ensemble de volumes de contrôle en utilisant des formes de maillage (maillage structuré ou non structuré).

Dans cette étude le maillage utilisé est un maillage arbitraire non structuré. Ces volumes de contrôle enveloppent tout le domaine de calcul sans chevauchement, de telle façon que la somme de leurs volumes soit égale exactement au volume du domaine de calcul. Un point est positionné au centre de chaque volume et est appelé centre du volume de contrôle, il sera noté P (figure II.2). Les nœuds des volumes voisins seront notés suivant leurs positions N, S, W, E, T et B (North, South, West, East, Top et Bottom respectivement). La Figure ci-dessous montre les différentes notations utilisées pour chacun des volumes de contrôles donnés.



**Figure II.2** Volume de contrôle dans un maillage tridimensionnel non orthogonal [8].

## II.5.2 Discrétisation des équations gouvernantes

L'étape principale de la méthode des volumes finis est l'intégration des équations régissant pour chaque volume de contrôle. Les équations algébriques déduites de cette intégration rendent la résolution des équations de transports plus simple. Chaque nœud est entouré par un ensemble de surfaces qui comporte un élément de volume. Toutes les variables du problème et les propriétés du fluide sont stockées aux nœuds de cet élément [8].

Les équations régissant l'écoulement, sont présentées sous leurs formes moyennées dans un repère cartésien (x, y, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j) = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j U_i) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu_{eff} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (\text{II.6})$$

Notons que toute équation régissant l'écoulement interne en turbomachines peut être écrite sous la forme générale suivante (équation de transport de la variable f)

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi)}{(1)} + \frac{\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \Phi)}{(2)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_{eff} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right)}{(3)} + \frac{S_\Phi}{(4)} \quad (\text{II.7})$$

Où :

$U_j$ : est la composante de la vitesse suivant la direction  $x_j$

$\rho$ : la masse volumique.

$\Gamma$  : est le coefficient de diffusion.

$S$  : est le terme source.

$\Phi$ : Une des variables suivantes  $\Phi=1, u, v, w, k, \varepsilon$  et  $T$ .

Sachant que :

Terme 1 : terme in stationnaire, 2 : terme convectif, 3 : terme diffusif et 4 : terme source.

Les équations (II.5), (II.6) et (II.7) peuvent être intégrées dans un volume de contrôle, en utilisant le théorème de la divergence de Gauss pour convertir les intégrales de volume en intégrales de surface comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \, dv + \int_s \rho U_j \, dn_j = 0 \quad (\text{II.8})$$

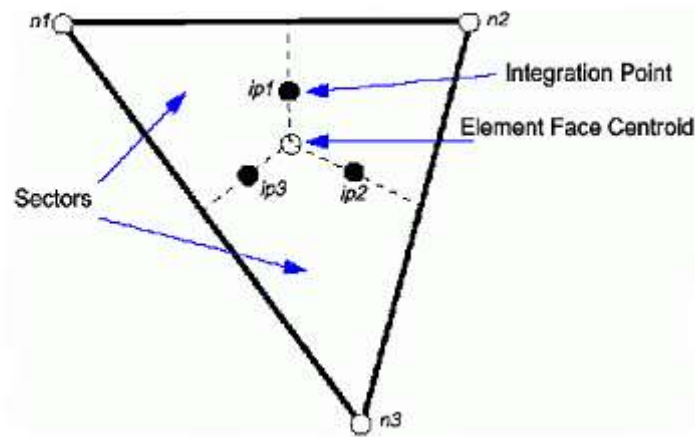
$$\frac{d}{dt} \int_v \rho U_i \, dv + \int_s \rho U_j U_i \, dn_j = - \int_s P \, dn_j + \int_s \mu_{eff} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) dn + \int_s S_{u_i} \, dv \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho U \Phi \, dv + \int_s \rho U_j \Phi \, dn_j = - \int_s \Gamma_{eff} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dn_i + \int_v S_\Phi \, dv \quad (\text{II.10})$$

L'étape suivante consiste à discrétiser les inconnues du problème ainsi que les opérateurs différentiels de cette équation.

Toutes ces opérations mathématiques conduiront à l'obtention, sur chaque volume de contrôle, d'une équation discrétisée qui reliera les variables d'une cellule à celles des cellules voisines.

L'ensemble de ces équations discrétisées formera finalement un système matriciel. Considérant maintenant un élément d'une maille isolée tel que celui montré ci-dessous dans figure (II.3) :



**Figure II.3** Point d'intégration dans un élément d'un volume de contrôle [8].

Après la discrétisation et le réarrangement des équations (II.8), (II.9) et (II.10) on obtient les formes suivantes :

$$V(\frac{\rho-\rho^0}{\Delta t} + \sum_{ip}(\rho U_j \Delta n_j) = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$V(\frac{\rho U_i - \rho^0 U_i^0}{\Delta t}) + \sum_{ip} \dot{m}_{ip} (U_i)_{ip} = \sum_{ip} (P \Delta n_j)_{ip} + \sum_{ip} (\mu_{eff} (\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}) \Delta n_j)_{ip} + \overline{S_{u_i}} \quad (\text{II.12})$$

$$V(\frac{\rho \Phi - \rho^0 \Phi^0}{\Delta t}) + \sum_{ip} \dot{m}_{ip} \Phi_{ip} = \sum_{ip} (\Gamma_{eff} (\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}) \Delta n_j)_{ip} + \overline{S_{\Phi}} V \quad (\text{II.13})$$

Sachant que :

V : est le volume d'intégration de la grandeur  $\Phi$ .

ip : est l'indice du point d'intégration (intégration point.).

$\Delta n_j$  : est la surface d'intégration de la grandeur  $\Phi$ .

$\Delta t$  : est un intervalle de temps (time step).

L'indice supérieur <sup>0</sup> se rapporte au niveau de temps précédant.

Il est important de souligner que le schéma temporel utilisé dans les équations (II.11), (II.12) et (II.13) est le schéma avant du premier ordre, et le débit massique discret  $\dot{m}_{ip}$  traversant une surface du volume de contrôle est donnée par :

$$\dot{m}_{ip} = (\rho U_j \Delta n_j)_{ip}^0 \quad (\text{II.14})$$

### II.5. 3 Couplage Pression-Vitesse

Contrairement au maillage décalé qui utilise quatre mailles pour la détermination des différents paramètres de l'écoulement (u, v, w et p), le code de calcul CFX, utilisé dans cette étude, utilise une seule maille d'où le nom du maillage centré. Cette méthode est parmi les méthodes qui économisent au mieux l'espace mémoire et le temps de calcul effectué par le module « Solver » [8].

Si la pression est connue, les équations discrétisées sont aisément résolues. Cependant certaines méthodes, spécialement pour les écoulements compressibles, prennent la masse volumique comme une fonction inconnue ; à partir de l'équation de continuité et l'équation d'état, la pression est calculée. Dans le cas de CFX, l'équation de conservation de la masse pour une seule dimension peut être écrite comme suit :



$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^3 A}{4\dot{m}} \left(\frac{\partial^4 P}{\partial x^4}\right) = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\dot{m} = \rho U_j \Delta n_i \quad (\text{II.16})$$

### II.5.3.1 Les fonctions de forme

Les champs de solution sont stockés dans les nœuds de la maille. Cependant les différents termes des équations (II.11), (II.12 et (II .13) exigent la détermination des variables sur les points d'intégration. C'est pour cette raison que nous devons avoir une méthode de calcul pour chaque élément. Cela est possible grâce à l'utilisation des fonctions de forme. La grandeur de l'écoulement dans un élément de volume (figure II.3) est fonction de celles dans les nœuds de l'élément et est donnée par la relation suivante [8] :

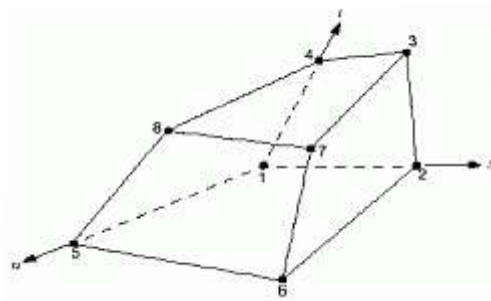
$$\Phi = \sum_{i=1}^{noeud} N_i \Phi_i \quad (\text{II.17})$$

Où  $N_i$  est la fonction de forme pour le nœud  $i$  et  $\Phi_i$  la valeur de la grandeur  $f$  dans le même Quad. Une particularité des facteurs de forme, fait en  $\sum_{i=1}^{noeud} N_i = 1$  sorte que :

$$N_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Notons que pour nœud  $j$  :

Les fonctions de forme utilisées dans CFX sont linéaires en termes de coordonnées. Par exemple, considérons l'élément hexaèdre suivant :



**Figure II.4** Détermination des positions de nœuds dans un élément hexaédral [8].

Les fonctions de forme dans l'espace pour chaque nœud sont données par les formules suivantes :

$$N_1(s, t, u) = (1-s)(1-t)(1-u) \quad (a)$$

$$N_2(s, t, u) = s(1-t)(1-u) \quad (b)$$

$$N_3(s, t, u) = st(1-u) \quad (c)$$

$$N_4(s, t, u) = (1-s)t(1-u) \quad (d)$$

$$N_5(s, t, u) = (1-s)(1-t)u \quad (e) \quad (II.19)$$

$$N_6(s, t, u) = s(1-t)u \quad (f)$$

$$N_7(s, t, u) = stu \quad (g)$$

$$N_8(s, t, u) = (1-s)tu \quad (h)$$

Ces fonctions sont également employées pour le calcul des diverses quantités géométriques, telles que les positions, les coordonnées du point d'intégration (ip), les surfaces et les différents vecteurs. Les équations de formes sont également applicables pour les coordonnées cartésiennes, dans ce cas, elles peuvent être écrites de la manière suivante :

$$x = \sum_{i=1}^{noeud} N_i X_i \quad (II.20)$$

$$y = \sum_{i=1}^{noeud} N_i Y_i \quad (II.21)$$

$$z = \sum_{i=1}^{noeud} N_i Z_i \quad (II.23)$$

Les fonctions de forme sont aussi employées pour évaluer les dérivées partielles des termes de flux sur les surfaces de contrôle et pour chaque direction, la formule générale des différents flux est la suivante :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{ip} = \sum_n \left. \frac{\partial N_n}{\partial x} \right|_{ip} \Phi_n \quad (II.24)$$

Les solutions des dérivées partielles de chaque fonction de forme et pour chaque nœud doivent être présentées dans le repère cartésien, pour cela nous devons déterminer la matrice de transformation de Jacobian :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial s} \\ \frac{\partial N}{\partial t} \\ \frac{\partial N}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

### II.5.3.2 Les gradients de pression

L'intégration du gradient de pression  $\left(-\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)$  sur le volume de contrôle dans les équations de quantité de mouvement implique l'évaluation de l'expression suivante [8]:

$$(P \Delta n_{ip})_{ip} \quad (\text{II.26})$$

Ou

$$P_{ip} = \sum_n N_n(s_{ip}, t_{ip}, u_{ip}) P_n \quad (\text{II.27})$$